平成31年度前期入試
数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B　②
解答例

出題意図

$\boxed{4}$ 範囲：数列の極限，対数関数

- 区分求積法などを用いて極限を求めることができるかどうかを問うている。
- 二次関数，絶対値関数と対数関数の合成関数の挙動を把握できるかどうかを問うている。

$\boxed{5}$ 範囲：複素数平面

- 複素数の積が備える幾何学的な意味を理解し，それに関連する問題を解くことができるかどうかを問うている。

$\boxed{6}$ 範囲：関数の極限，微分

- 微分を用いて，不等式を導くことができるかを問うている。
- 関数の極限をもとめることができるかを問うている。

解答例

解答が一義的に定まるものについてはそれを示し，それ以外については解答の方針を一つ例示する。なお，採点においては，解答を導出するまでのプロセスや説明の論理性を重視した。

$\boxed{4}$

(1)

$$\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)$$

(2)(i)

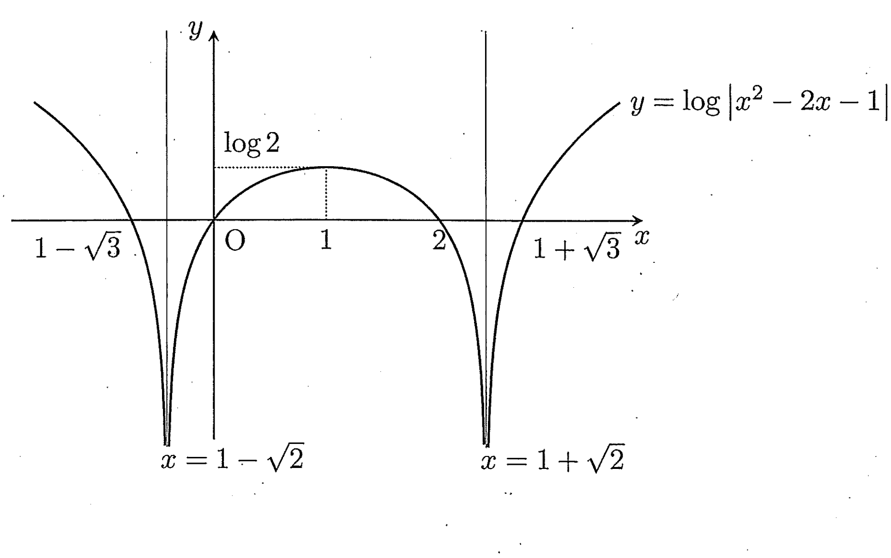
$$x=1\pm\sqrt{3},\quad 0,\quad 2$$

(ii)

増減表は次の通りである。

| $x$ | $\cdots$ | $1-\sqrt{2}$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $1+\sqrt{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $\log 2$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

極大値は $\log 2$ $(x=1)$，漸近線は $x=1\pm\sqrt{2}$，$x$ 軸との交点は $x=1\pm\sqrt{3}, x=0, x=2$ 。



$\boxed{5}$

(1) $z=-1+i,\ z=3+3i$

(2) $z=(1+2\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})i,\ z=(1-2\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})i$

$\boxed{6}$

(1) $g(x)=x\log x-(x-1)\quad(x>0)$ とおく。
増減表は次のようになる。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | / | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | / | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

従って，$g(x)\geqq 0$ となる。等号成立は $x=1$ のときのみとなる。

(2)(i)

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)}&=\frac{d}{dx}(\log f(x))\\&=\frac{1}{2x^2}\left\{-2\log\frac{a^x+b^x}{2}+xA(x)\log a+xB(x)\log b\right\}\end{aligned}$$

$A(x)+B(x)=2$ であるから

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2x^2}\left\{A(x)\left(\log a^x-\log\frac{a^x+b^x}{2}\right)+B(x)\left(\log b^x-\log\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2x^2}\left\{A(x)\log A(x)+B(x)\log B(x)\right\}\end{aligned}$$

(ii) (i) および (1) の不等式より，

$$\frac{f'(x)}{f(x)}>\frac{1}{2x^2}\left\{A(x)-1+B(x)-1\right\}=0$$

$f(x)>0$ であるから，$f'(x)>0$ となる。従って，$f(x)$ は $x>0$ において増加する。

(iii) $a>b>0$ であるから，

$$\left(\frac{a^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}<\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}<\left(\frac{a^x+a^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

よって，

$$\frac{a}{2^{\frac{1}{x}}}<f(x)<a$$

従って，

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=a$$