令和４年度前期入試

数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学Ａ・数学Ｂ③ 解答例

出題意図

$\boxed{7}$ 範囲：対数関数，数列

- 対数関数に関する基本的な理解を問うている。
- 漸化式から一般項を求めることができるかをどうかを問うている。

$\boxed{8}$ 範囲：微分積分，極限

- 増減表を用いて関数の最大値が求められるかどうかを問うている。
- 基本的な関数の定積分を求めることができるかどうかを問うている。
- はさみうちの定理を用いて，極限を求めることができるかどうかを問うている。

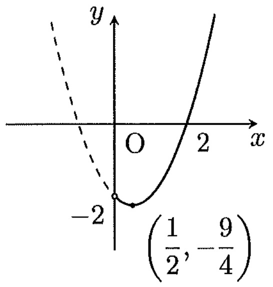
$\boxed{9}$ 範囲：微分積分，指数関数

- 導関数を通して，与えられた関数の基本的な性質が把握できるかどうかを問うている。
- 指数関数の基本的な理解を問うている。

解答例

解答が一義的に定まるものについてはそれを示し，それ以外については解答の方針を一つ例示する。なお，採点においては，解答を導出するまでのプロセスや説明の論理性を重視した。

$\boxed{7}$ (1) 求める図形は下図のとおり，$y = x^2 - x - 2$ の $x > 0$ の部分となる。



(2) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1 \ (n \geqq 1)$

$\boxed{8}$ (1) $f(x) = x(1-x)^n \ (0 \leqq x \leqq 1)$ とおく。このとき，$f(x)$ の増減表は以下の通りとなる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{n+1}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

よって，与えられた不等式が成立する。

(2) $a_n \leqq x \leqq b_n$ のとき，$0 < \dfrac{1}{n} = \dfrac{a_n^2}{\sqrt{n}} \leqq \dfrac{x^2}{\sqrt{n}} \leqq \dfrac{b_n^2}{\sqrt{n}} = 1$ となる。よって，(1) より $\dfrac{x^2}{\sqrt{n}}\left(1 - \dfrac{x^2}{\sqrt{n}}\right)^n < \dfrac{1}{n}$ となる。この不等式を用いることで次式が得られる。

$$0 < \int_{a_n}^{b_n} \left(1 - \frac{x^2}{\sqrt{n}}\right)^n dx < \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt{n}}{x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(a_n^{-1} - b_n^{-1}\right) < n^{-1/4} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$\boxed{9}$ (1) $k > 2e$ のとき２個，$k < 0$, $k = 2e$ のとき１個，$0 \leqq k < 2e$ のとき０個。

(2) $k < 0$ のとき，最大値は $e^2 - k \quad (x = 1)$ となる。$k = 2e$ のとき，最大値は $e^2 - 2e \quad (x = 1)$ となる。