令和４年度入学試験問題（後期）

数　　学

数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学Ａ・数学Ｂ

【注 意 事 項】

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いて見てはならない。
2. 本冊子には，$\boxed{1}$ から $\boxed{3}$ までの３問題が印刷されていて，合計２ページである。落丁，乱丁，印刷の不鮮明な箇所等がある場合には申し出ること。
3. 解答用紙を別に配付している。解答は，問題と同じ番号の解答用紙に記入すること。なお，<u>解答用紙の裏面に記入してはならない。解答用紙の裏面に記入した内容は採点されないので注意すること</u>。
4. $\boxed{1}$ から $\boxed{3}$ までのすべてを解答すること。
5. 解答用紙の指定された欄に学部名および受験番号を記入すること。
6. 提出した解答用紙以外はすべて持ち帰ること。

1 曲線 $y = \tan x$ 上の点 $(t, \tan t)$ における接線が x 軸と交わる点を $(f(t), 0)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(t)$ を t の式で表せ。

(2) 自然数 n に対して，実数 a_n を

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$$

で定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

2 k を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1) 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \frac{x}{k(k+x)}\,dx$$

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ に対して

$$0 \leqq \frac{x}{k(k+x)} \leqq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

が成り立つことを示せ。

(3) 2 以上の整数 n に対して，実数 a_n を

$$a_n = \frac{1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}}{\log n}$$

で定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

3 互いに素な２つの自然数 p，q に対して $C(p,\ q)$ は中心 $\left(\dfrac{p}{q},\ \dfrac{1}{2q^2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2q^2}$ の円を表すとする。次の問いに答えよ。

(1) 互いに素な自然数の２つの組 $(a,\ b)$ と $(c,\ d)$ が次の条件を満たすとする。

$$\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$$

このとき，２つの円 $C(a,\ b)$ と $C(c,\ d)$ は共有点をもたないか，または接することを証明せよ。

(2) ２つの円 $C(3,\ 5)$，$C(2,\ 3)$，および x 軸に接する円 $C(p,\ q)$ をすべて求めよ。