令和４年度後期入試

数学 I・数学 II・数学 III・数学 A・数学 B　解答例

出題意図

$\boxed{1}$ 範囲:微分積分, 極限

- 接線の方程式を求められるかどうかを問うている。
- 積分と無限級数の和の関係を理解しているかを問うている。

$\boxed{2}$ 範囲:微分積分, 極限

- 基本的な関数の定積分を求めることができるかどうかを問うている。
- 関数の増減をもとに与えた不等式を証明できるかを問うている。
- はさみうちの定理を用いて極限を求めることができるかどうかを問うている。

$\boxed{3}$ 範囲:数と式, 図形と方程式

- 2 つの円の関係の理解をもとに, 証明できるかを問うている。
- 絶対値を含む連立方程式の自然数の解を求めることが出来るかを問うている。

解答例

解答が一義的に定まるものについてはそれを示し, それ以外については解答の方針を一つ例示する。なお、採点においては, 解答を導出するまでのプロセスや説明の論理性を重視した。

$\boxed{1}$(1)$f(t)=t-\sin t\cos t$

(2)$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(t)\,dt=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{\pi}$

$\boxed{2}$(1)$\frac{1}{k}-(\log(k+1)-\log k)$

(2) $\frac{x}{k(k+x)}=\frac{(k+x)-k}{k(k+x)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}$ の式を用いると $0\leqq x\leqq 1$ のとき $\frac{1}{k+1}\leqq\frac{1}{k+x}\leqq\frac{1}{k}$ より，$0\leqq\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\leqq\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ となる。よって，$0\leqq\frac{x}{k(k+x)}\leqq\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ となる。

(3)(1) と (2) より，$0\leqq\frac{1}{k}-(\log(k+1)-\log k)\leqq\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ となる。$n\geqq 2$ として $k=1,2,\cdots,n-1$ に関して和をとると $\displaystyle 0\leqq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\log n\leqq 1-\frac{1}{n}$。よって，$\displaystyle\frac{1}{n}\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\leqq 1$ を得る。各辺を $\log n$ で割り, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\log n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}=0$ とはさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1$ が得られる。

$\boxed{3}$ (1) 円 $C(a,b)$ と $C(c,d)$ の間の中心間の距離を d, 2 つの円の半径の和を S とすると $d^2-S^2=\frac{(ad-bc)^2-1}{b^2d^2}$ となる。$\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$ より，$ad-bc\neq 0$, また，a,b,c,d は自然数より，$ad-bc$ は整数である。よって，$(ad-bc)^2\geqq 1$ が成立し,$d^2-S^2\geqq 0$ から，$d\geqq S$ となることが示された。以上より，円 $C(a,b),C(c,d)$ は接するか，または交点を持たない。

(2)(1) より，$|ad-bc|=1$ のとき，円 $C(a,b),C(c,d)$ は接する。$C(3,5),C(2,3)$，および x 軸に接する円を $C(p,q)$ とすると,

$$\begin{cases}|3q-5p|=1\\|2q-3p|=1\end{cases}$$

が成立する。この連立方程式を満たす互いに素な自然数の組 (p,q) を求めると $(1,2)$ と $(5,8)$ となる。よっ

て，円 $C(1,2)$ と円 $C(5,8)$ が求める円となる。