2025年度春季入学（第2期）
弘前大学大学院理工学研究科博士前期課程
数物科学コース　解答例

整数の全体 $\mathbf{Z}$ は加法群をなす．その部分群を決定してみよう． H を $\mathbf{Z}$ の部分群とする．H が自明な部分群でないとし， a を H に属する最小の正の整数とする．H は，$na,\ n \in \mathbf{Z}$ の形の元全体からなることを示す．$y \in H$ とする．そのとき，整数 n, r $(0 \leq r < a)$ があって，$y = na + r$ と書ける．H は部分群であり $r = y - na$ であるから，$r \in H$ となり，$r = 0$ となり結論が得られる．

G を群とする．G が巡回群であるとは，ある元 $a \in G$ があって，すべての $x \in G$ が a^n $(n \in \mathbf{Z})$ の形に書けること（別の言い方をすれば，写像 $f : \mathbf{Z} \longrightarrow G$，$f(n) = a^n$ が全射であること）である．この性質をもつ元 $a \in G$ を G の生成元という．

G を群とし，$a \in G$ とする．a^n $(n \in \mathbf{Z})$ の全体からなる部分集合は明らかに G の巡回部分群である．整数 $m > 0$ が $a^m = e$ を満たすとき，m を a の指数という．すべての $x \in G$ に対して $x^m = e$ となる $m > 0$ を G の指数という．

G を群とし $a \in G$ とする．準同型写像 $f : \mathbf{Z} \longrightarrow G$，$f(n) = a^n$ を考え，H をその核とする．

(i) 核が自明なとき．f は $\mathbf{Z}$ から a が生成する G の巡回部分群の上への同型写像で，この部分群は無限巡回群である．a が G を生成するならば，G は巡回群である．a は無限周期をもつという．

(ii) 核が非自明なとき．d を核に属する最小の正整数とする．d は a の周期と呼ばれる．整数 m が $a^m = e$ をみたせば，ある整数 s によって $m = ds$ と書ける．$e, a, \ldots, a^{d-1}$ は相異なる．実際，$a^r = a^s$ with $0 \leq r, s \leq d-1$ とする． $r \leq s$ としよう．そのとき，$a^{s-r} = e.$ 　$0 \leq s - r < d$ であるから $s - r = 0$ となり結論が得られる．a が生成する巡回部分群の位数は d である．次が成り立つ:

命題2　G を位数 $n > 1$ の有限群とする．a は G の元で $a \neq e$ とする．そのとき a の周期は n の約数である．G の位数が素数 p ならば，G は巡回群ですべての生成元の周期は p である．さらに

命題3　G を巡回群とする．G のすべての部分群は巡回群である．f を G の準同型写像とすると，f の像は巡回群である．