

2025年度秋季入学・2026年度春季入学（第1期）
弘前大学大学院理工学研究科博士前期課程数物科学コース
解答例

1

解答例

トポロジーの根本問題は、2つの空間が同相かどうかを決定することである。2つの空間が同相であることを示すには、一方の空間から他方の空間への連続な全単射で、連続な逆をもつ写像を構成する必要がある。2つの空間が同相でないことを示すには、このような写像が存在しないことを示す必要がある。それを行うところは多くの場合、より難しい。普通用いられる方法は、一方の空間で成り立ち他方では成り立たない、いくつかの位相的性質（すなわち同相写像によって不変な性質）を見つけることである。例えば、 \mathbf{R}^2 の閉単位円板は、平面 \mathbf{R}^2 と同相になりえない、なぜなら、閉円板はコンパクトであるが、平面はそうでないからである。実数直線 \mathbf{R} は \mathbf{R}^2 と同相でない、なぜなら、 \mathbf{R} から1点を除くと非連結な空間になるが、 \mathbf{R}^2 から1点を除いてもそうはならない。このような初等的性質は、同相問題に取り組むうえで十分なものではない。例えばすべてのコンパクトな曲面を同相写像に関して分類することは、これらよりも高度な位相不変量が必要になる。一般に、 $n \neq m$ のとき、 \mathbf{R}^n と \mathbf{R}^m が同相でないことを示す問題などがそうである。

代数的トポロジーは Poincaré や Betti といった数学者がこのような位相不変量を構成する試みに始まる。Poincaré は位相空間の基本群と呼ばれる群を導入した、そしてそれは定義から位相不変量である。球面、トーラス、Klein の壺といったなじみの空間が異なった基本群を持つこと、したがってこれらが同相でないことをかなり簡単に示すことができる。実際すべてのコンパクトな曲面は基本群を用いて分類できる。

一方 Betti は空間をホモロジー群と呼ばれるアーベル群の列と関係させた。この場合、同相は空間が同型なホモロジー群をもつことは明らかではないが、それが正しいことが結局は証明された。これらの群は同相問題に取り組むさいに使用される、ひとつの利点は、基本群にくらべて計算がしばしば容易であることである。

1

出題意図

トポロジー関連の英文を読み、数学的内容を正しく理解し、それを日本語で適切に表現できるかを問うている。

2

解答例

問1

According to Newton's laws of motion, when no force is exerted, an object remains still or moving straight with constant velocity. The magnitude of acceleration caused by a force of magnitude f to an object with mass m is $\frac{f}{m}$. When two objects exert forces on each other, the magnitudes of the forces are equal while their directions are opposite.

問2

古典力学の法則と概念から根本的に離別することの必要性は、光の本性に関して実験的に積み上げられた事実を考えることによって最も明瞭に見て取れる。一方で、干渉と回折の現象は光の波動理論に基づいてのみ説明することができる。他方、光電子放出や自由電子による散乱のような現象は、光がその振動数に依存した特定のエネルギーと運動量を持つ光子と呼ばれる小粒子で形作られていることを示している。これらの光子は、電子や物理学で他に知られている粒子たちと同じくらいの現実さで存在するように見える。光子の分割は観測されておらず、私たちはそれが存在できないと問題なく仮定することができる。

2

出題意図

問1

受験者の次の能力を測ることを意図する。

- 物理学の文脈で用いられる専門的な英単語の語彙が身につけていること
- 物理学に関する観念や論理を英文で正確に記述できること

問2

受験者の次の能力を測ることを意図する。

- 物理学の文脈で用いられる専門的な英単語の語彙が身につけていること
- 英文を解釈して物理学に関する観念や論理を的確に理解できること